

Instruktion

In-Funktion



Die In-Funktion als Umkehrfunktion der e-Funktion

Die e-Funktion ist streng monoton steigend und damit umkehrbar.

Die Umkehrfunktion zur e-Funktion ist $f(x) = \log_e x = \ln x$.

Eigenschaften der In-Funktion:

1) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}^+$ Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}$

2) Nullstellen: $N(1/0)$

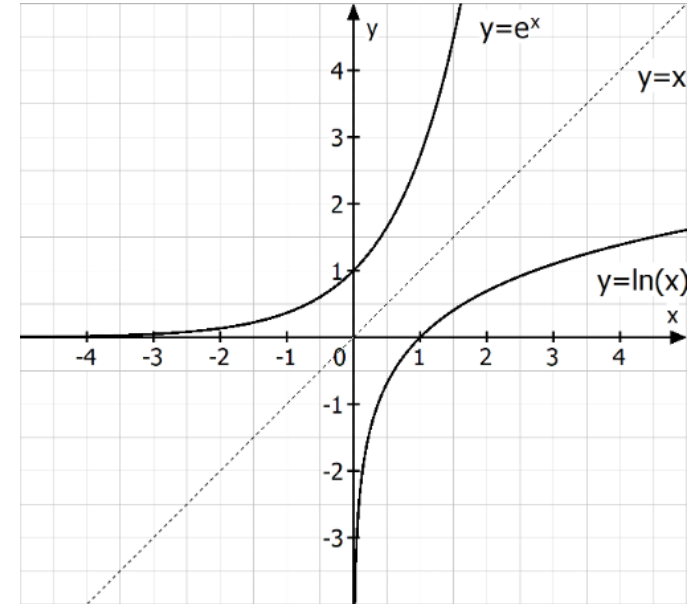
3) Monotonieverhalten: G_f ist streng monoton steigend in D_f

4) Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge:

$$x \rightarrow \infty \quad \ln x \rightarrow \infty \quad \quad \quad x \rightarrow 0^+ \quad \ln x \rightarrow -\infty$$

5) Ableitung: $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

6) Stammfunktion: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$



Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Beispiele:

1) $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$ "Probieren"

2) $2^{3x-2} = 2^7 \Rightarrow 3x-2 = 7 \Rightarrow x = 3$ "Exponentenvergleich"

3) $5^x = 30 \Rightarrow x = \log_5 30$

Besondere Logarithmen:

a) Zehnerlogarithmus (Basis 10)

$$\log_{10} 3 = \lg 3 \approx 0,47712$$

b) Natürlicher Logarithmus (Basis e)

$$\log_e 3 = \ln 3 \approx 1,0986$$

Berechnung von Logarithmen mit anderer Basis mit Hilfe von $\lg$ bzw. $\ln$:

$$\log_c a = \frac{\lg a}{\lg c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

Beispiel: $\log_5 30 = \frac{\lg 30}{\lg 5} \approx 2,1133$

Rechenregeln für den Logarithmus

$$(1) \log_a a = 1 \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$(2) \log_a 1 = 0 \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$(3) \log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; u, v \in \mathbb{R}^+$$

$$(4) \log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; u, v \in \mathbb{R}^+$$

$$(5) \log_a u^v = v \cdot \log_a u \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; u \in \mathbb{R}^+; v \in \mathbb{R}$$

Aufgaben:

$$1) \frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250 \quad 5^{y+2} = 1000 \quad \Rightarrow y+2 = \log_5 1000 \quad \Rightarrow y = \log_5 1000 - 2 \approx 2,2920$$

$$2) \log_7 (4-x) = 80 \quad D =]-\infty; 4[\quad 4-x = 7^{80} \quad \Rightarrow x = 4 - 7^{80} \approx -4,05 \cdot 10^{67}$$

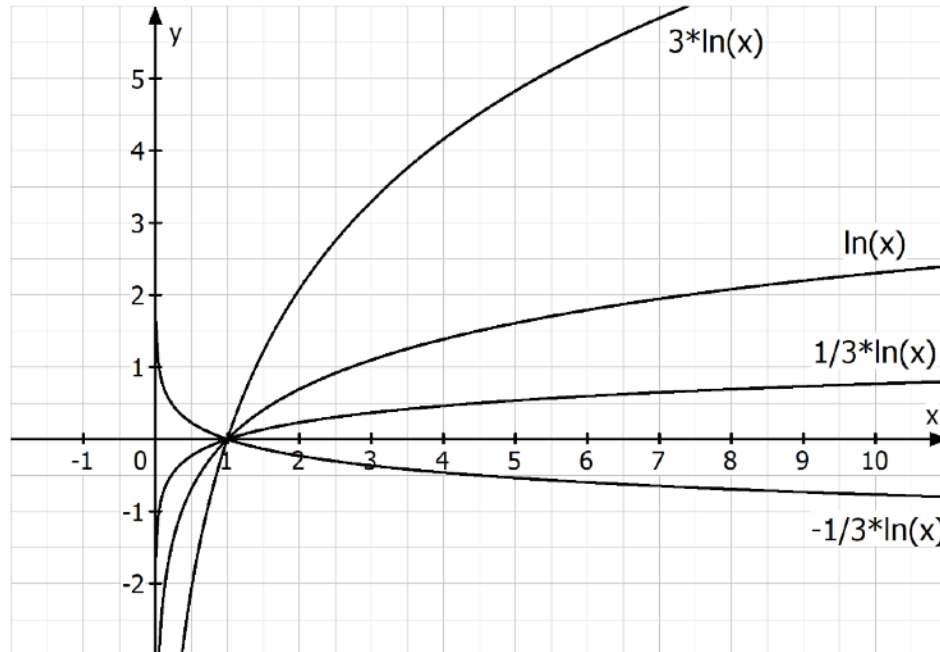
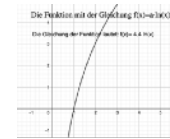
$$3) \ln(x+3) = 7,56 \quad D =]-3; \infty[\quad x+3 = e^{7,56} \quad \Rightarrow x = e^{7,56} - 3 \approx 1916,8455$$

Die allgemeine ln-Funktion

Wir untersuchen den Einfluss der Parameter a , b , c und d auf den Graphen der allgemeinen natürlichen Logarithmusfunktion f der Form $f(x) = a \cdot \ln(bx - c) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0; b \neq 0$.

Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \ln(x)$ mit $a \neq 0$:

Beispiele: $f(x) = 3 \cdot \ln(x)$ $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln(x)$ $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot \ln(x)$



Der Parameter a beeinflusst die Steigung des Funktionsgraphen. Er bewirkt eine Streckung oder Stauchung entlang der y -Achse.

$a > 1$: Graph steigt schneller als der Graph der $\ln$ -Funktion (gestreckt).

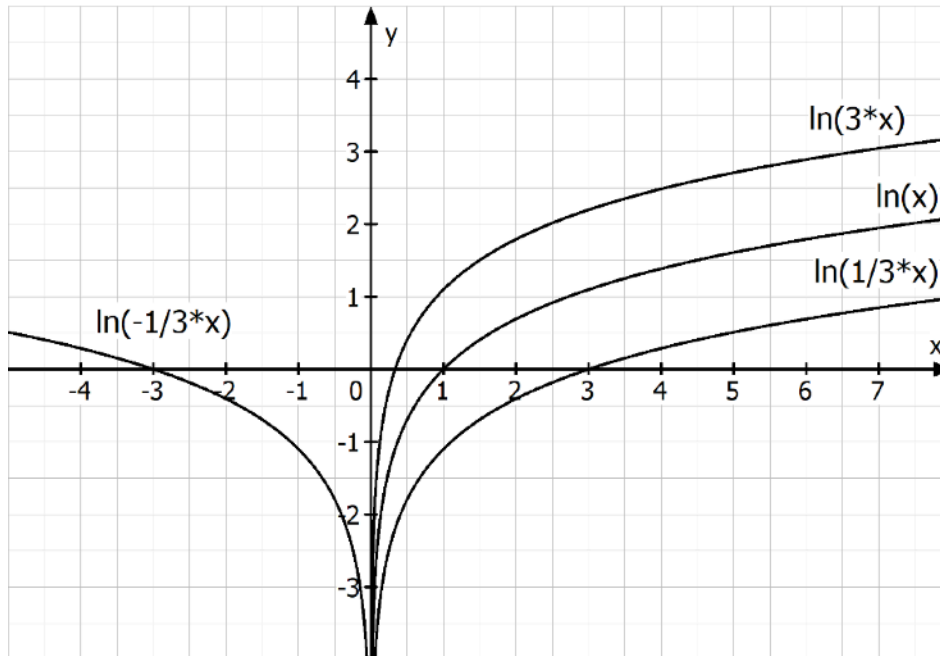
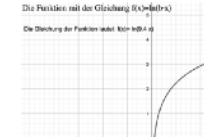
$0 < a < 1$: Graph steigt langsamer als der Graph der $\ln$ -Funktion (gestaucht).

$a > 0$: Graph streng monoton steigend und rechtsgekrümmt.

$a < 0$: Graph streng monoton fallend und linksgekrümmt.
(Spiegelung an der x -Achse)

Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln(b \cdot x)$ mit $b \neq 0$:

Beispiele: $f(x) = \ln(3 \cdot x)$ $f(x) = \ln\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$ $f(x) = \ln\left(-\frac{1}{3} \cdot x\right)$



$b > 1$: Graph ist im Vergleich zum Graphen der $\ln$ -Funktion entlang der x-Achse gestaucht.

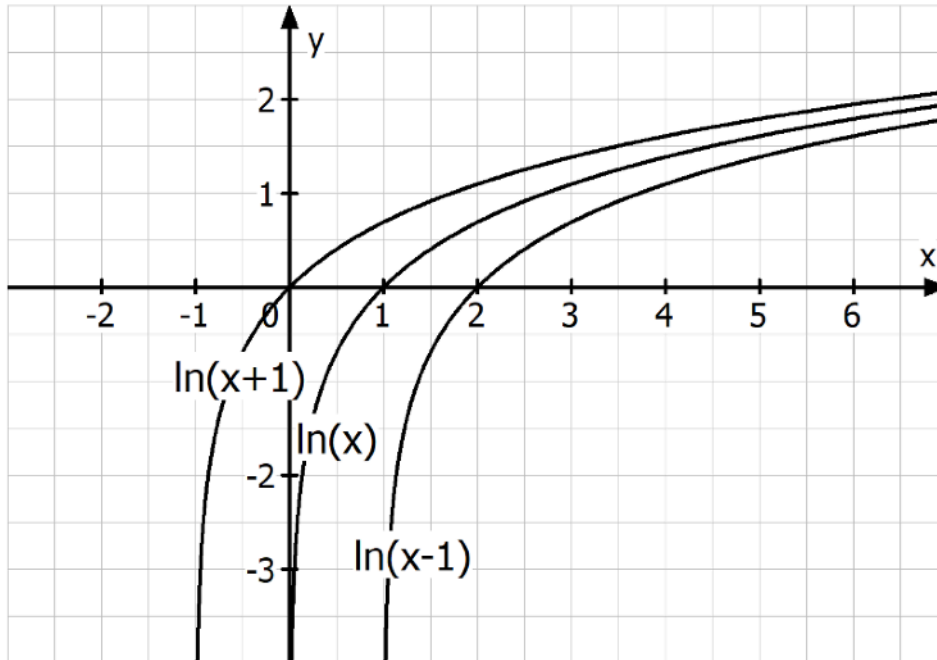
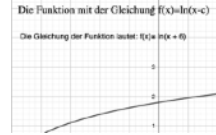
$0 < b < 1$: Graph ist im Vergleich zum Graphen der $\ln$ -Funktion entlang der x-Achse gestreckt.

$b > 0$: die Funktion ist nur für positive x-Werte definiert und streng monoton steigend.

$b < 0$: die Funktion ist nur für negative x-Werte definiert und streng monoton fallend.
(Spiegelung an der y-Achse)

Die Funktion mit der Gleichung $f(x)=\ln(x-c)$ mit $c \in \mathbb{R}$:

Beispiele: $f(x)=\ln(x+1)$ $f(x)=\ln(x-1)$

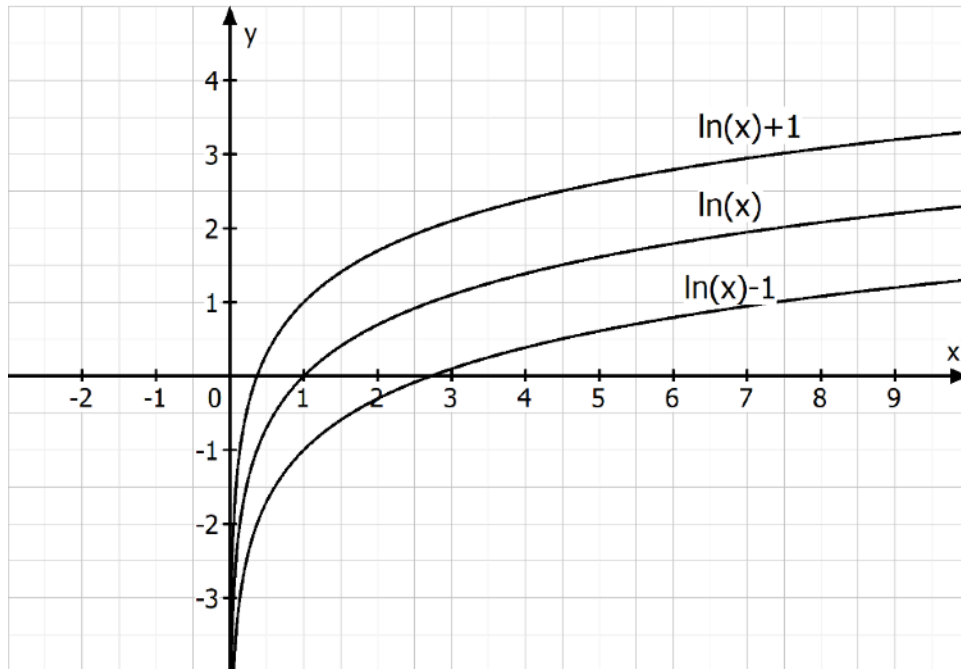
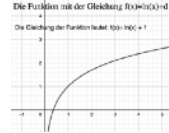


$c > 0$: Verschiebung um c Einheiten nach rechts

$c < 0$: Verschiebung um c Einheiten nach links

Die Funktion mit der Gleichung $\ln(x)+d$ mit $d \in \mathbb{R}$:

Beispiele: $f(x) = \ln(x)+1$ $f(x) = \ln(x)-1$



$d > 0$: Verschiebung um d Einheiten nach oben

$d < 0$: Verschiebung um d Einheiten nach unten

Zusammenfassung :

Bei einer Logarithmusfunktion f mit einer Gleichung der Form $f(x) = a \cdot \ln(bx - c) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0; b \neq 0$ beeinflussen die Parameter den Graphen wie folgt:

Parameter a und b : Streckung bzw. Stauchung entlang und Spiegelung an den Koordinatenachsen

Parameter c : Verschiebung entlang der x -Achse

Parameter d : Verschiebung entlang der y -Achse

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\ln(2x+1) - 0,5$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

Erläutern Sie die Einflüsse der Parameter, ermitteln Sie die maximale Definitionsmenge sowie die Nullstelle von f und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein kartesisches Koordinatensystem.

$$f(x) = -\ln(2x+1) - 0,5 = -\ln\left(2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) - 0,5$$

$a = -1$: keine Streckung/Stauchung entlang der y -Achse; G_f gespiegelt an der x -Achse

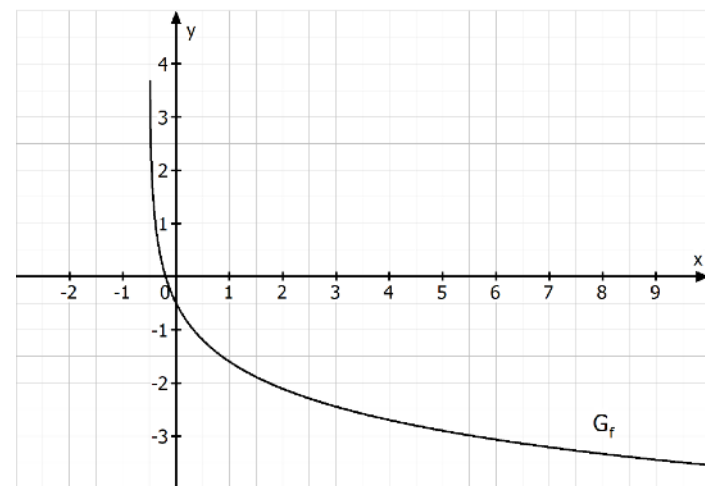
$b = 2$: gestaucht entlang der x -Achse

$c = -\frac{1}{2}$: verschoben um 0,5 nach links

$d = -0,5$: verschoben um 0,5 nach unten

Definitionsmenge: $2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow D_f =]-\frac{1}{2}; \infty[$

Nullstelle: $-\ln(2x+1) - 0,5 = 0 \Rightarrow \ln(2x+1) = -0,5 \Rightarrow 2x+1 = e^{-0,5}$
 $\Rightarrow x = \frac{e^{-0,5} - 1}{2} \approx -0,20$



Geben Sie die Parameter a , b , c und d für
 Parameter $a =$ -1 Parameter $b =$
 Der Funktionsterm lautet: $-1 \ln(-1 x - 0.5) +$
 Der Graph G_f ist in y -Richtung weder gest.
 Der Graph G_f ist in x -Richtung weder gest.
 Der Graph G_f ist nicht in x -Richtung versch.
 Der Graph G_f ist nicht in y -Richtung versch.

Neue Aufgabe
 Ion lautet: $-0.5 \ln(-2.5 x + 0.5) -$
 Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder fa
 Der Graph G_f ist i
 Wahr

Kurvendiskussion einer ln-Funktion

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(3x+2)$.

Bestimmen Sie die Definitionsmenge, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion f .

Definitionsmenge: $3x+2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3} \Rightarrow D_f = \left] -\frac{2}{3}; \infty \right[$

Schnittpunkt mit der y -Achse: $y = -\frac{1}{2} \cdot \ln(3 \cdot 0 + 2) = -\frac{1}{2} \ln(2) \approx -0,35 \quad S_y(0 | -0,35)$

Schnittpunkt mit der x -Achse: $-\frac{1}{2} \cdot \ln(3x+2) = 0 \Rightarrow \ln(3x+2) = 0 \Rightarrow 3x+2 = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \quad N\left(-\frac{1}{3} | 0\right)$

Monotonieverhalten: $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x+2} \cdot 3 = \frac{-3}{6x+4} < 0$ für alle $x \in D_f \Rightarrow G_f$ smf in $\left] -\frac{2}{3}; \infty \right[$

Krümmungsverhalten: $f''(x) = \frac{0 \cdot (6x+4) - (-3) \cdot 6}{(6x+4)^2} = \frac{18}{(6x+4)^2} > 0$ für alle $x \in D_f \Rightarrow G_f$ linksgekrümmt in $\left] -\frac{2}{3}; \infty \right[$

Untersuchen Sie das Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse die zugehörigen Funktionsgraphen.

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(3x+2) \quad D_f = \left] -\frac{2}{3}; \infty \right[$$

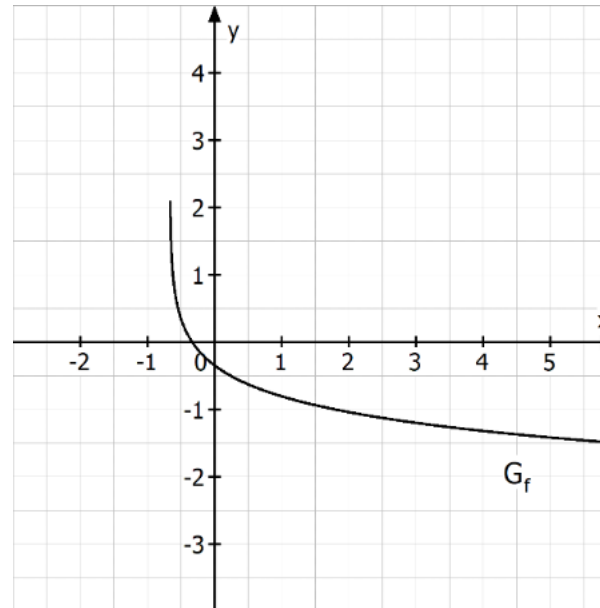
Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge :

$$x \rightarrow -\frac{2}{3}^+$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln(3x+2)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln(3x+2)}_{\rightarrow \infty} \rightarrow -\infty$$



Kurvendiskussion einer verketteten e-Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{e^x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph sei G_f . (Abitur 2008 AI)

Geben Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $\frac{2x^2 - 2}{e^x} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad N_1(-1/0) \quad N_2(1/0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $y = \frac{2 \cdot 0^2 - 2}{e^0} = -2 \Rightarrow S_y(0/-2)$

Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_f an.

$x \rightarrow +\infty \quad \frac{\overbrace{2x^2 - 2}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{e^x}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow 0$ weil e-Funktion überwiegt

$x \rightarrow -\infty \quad \frac{\overbrace{2x^2 - 2}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{e^x}_{\rightarrow 0_+}} \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote bei $y = 0$

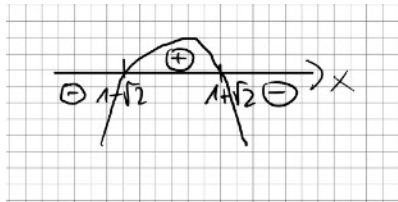
Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f . Runden Sie die Ordinaten auf zwei Nachkommastellen.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{e^x} \qquad f'(x) = \frac{4x \cdot e^x - (2x^2 - 2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{(-2x^2 + 4x + 2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x^2 + 4x + 2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2} (\approx 2,41) \quad x_2 = 1 - \sqrt{2} (\approx -0,41)$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

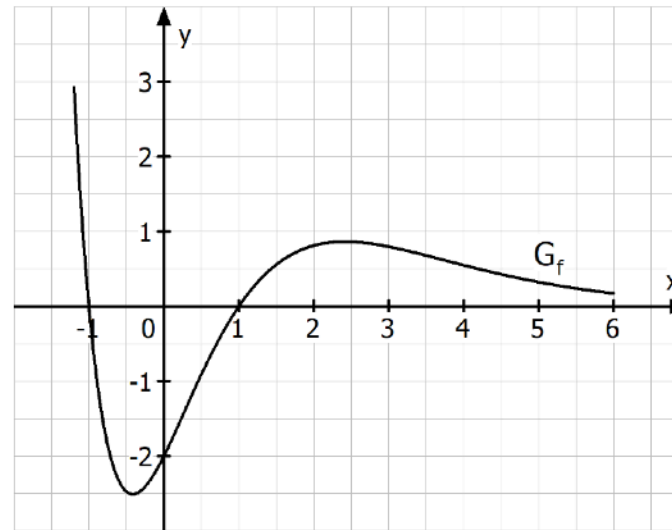
Skizze von $(-2x^2 + 4x + 2)$:



$$\Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ HP} \quad \Rightarrow \text{HP}(1 + \sqrt{2} / 0,86) \qquad x_2 = 1 - \sqrt{2} \text{ TP} \quad \Rightarrow \text{TP}(1 - \sqrt{2} / -2,51)$$

Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte im Intervall $[-1,2;6]$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

x	-1,2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	2,92	0	-2	0	0,81	0,80	0,55	0,32	0,17



Gegeben ist die Funktion $g(x) = \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$.

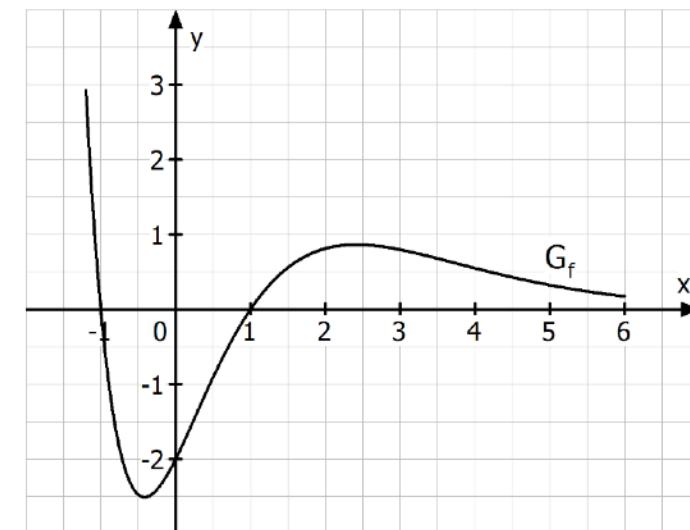
Ihr Graph ist G_g . Lösen Sie die folgenden Aufgaben möglichst unter Verwendung der Eigenschaften von f .

Geben Sie D_g an und begründen Sie, dass g nur genau eine Nullstelle besitzt.

$$D_g =]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$$

$$\text{Nullstelle: } g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$$

In der Zeichnung sieht man, dass $y = 1$ den Graphen G_f nur einmal schneidet
 $\Rightarrow g$ hat genau eine Nullstelle.



Bestimmen Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g .

$$x \rightarrow -\infty \quad \underbrace{\ln(f(x))}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow \infty \quad \underbrace{\ln(f(x))}_{\rightarrow 0_+} \rightarrow -\infty$$

$$x \xrightarrow{<} -1 \quad \underbrace{\ln(f(x))}_{\rightarrow 0_+} \rightarrow -\infty$$

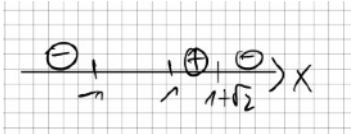
$$x \xrightarrow{>} 1 \quad \underbrace{\ln(f(x))}_{\rightarrow 0_+} \rightarrow -\infty$$

Untersuchen Sie G_g auf Extrempunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten und Art an.

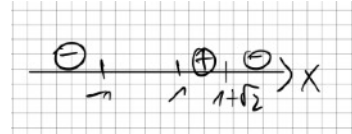
$$g(x) = \ln(f(x)) \quad g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \quad g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad (x_2 = 1 - \sqrt{2}) \notin D_g$$

VZU g /: Nenner in D_g immer positiv

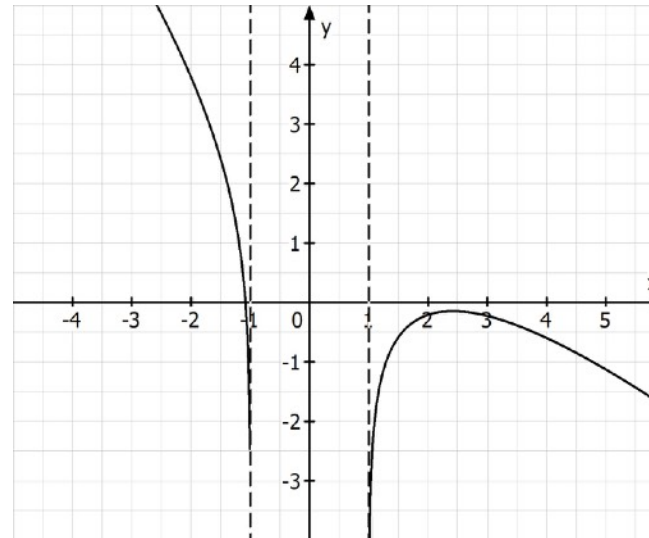
VZU f /:



VZU g /:



$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} \text{ HP} \quad \Rightarrow \text{HP}(1 + \sqrt{2} / \ln(0,86)) \quad \Rightarrow \text{HP}(1 + \sqrt{2} / -0,15)$$



Kurvendiskussion einer verketteten In-Funktion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge $D(f) \subset \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion f heißt G(f). (Abitur 2006 AI)

Geben Sie $D(f)$, das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow 0, x \rightarrow -2$ und für $x \rightarrow +\infty$ sowie die Gleichungen aller Asymptoten von $G(f)$ an.

Definitionsmenge: $\frac{x^2}{x+2} > 0 \quad x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$

	-2	0
x^2	+	+
$x+2$	-	+
$\frac{x^2}{x+2}$	-	+

$$D(f) =]-2; 0[\cup]0; \infty[$$

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge:

$$x \xrightarrow{>} -2 \quad \underbrace{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \quad x \xrightarrow{<} 0 \quad \underbrace{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}_{\rightarrow 0_+} \rightarrow -\infty \quad x \xrightarrow{>} 0 \quad \underbrace{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}_{\rightarrow 0_+} \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow +\infty \quad \underbrace{\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$$

Asymptoten: $x = -2 \quad x = 0$

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1 \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

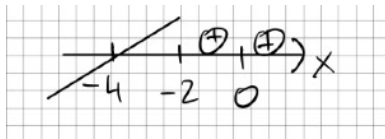
Ermitteln Sie rechnerisch die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f echt monoton zunehmend bzw. echt monoton abnehmend ist.

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{x+2}} \cdot \frac{2x \cdot (x+2) - x^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) \cdot (x^2 + 4x)}{x^2 \cdot (x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 \cdot (x+2)} = \frac{x+4}{x \cdot (x+2)}$$

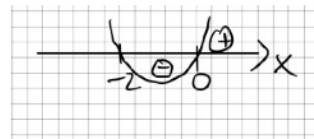
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x+4 = 0 \Rightarrow (x = -4) \notin D(f)$$

Skizze von f':

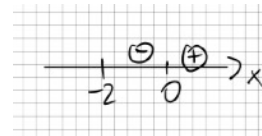
Skizze Zähler:



Skizze Nenner:



VZU f/:



$\Rightarrow G(f)$ ist sms in $]0; +\infty[$ und smf in $] -2; 0[$

Zeichnen Sie den Graphen $G(f)$ und seine Asymptoten für $-2 < x \leq 5$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und nach der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem.

